PY LE GALL

Introduction aux algèbres d'opérateurs

① C^*-algèbres de groupes discrets

Γ groupe discret, dénombrable

$\mathbb{C}[\Gamma]$ algèbre associée $\left(\sum_g a_g g\right)\left(\sum_g b_g g\right) = \sum_g c_g g$

où $c_g = \sum_{kh=g} a_k b_h$, $x^* = \sum \overline{a_g}\, g^{-1}$

Complétions? (Gelfond)

Lien avec la théorie des représentations

(i) $\ell^1(\Gamma)$ → algèbre de Banach involutive unifère $\begin{cases} \|xy\|_1 \leq \|x\|_1 \|y\|_1 \\ \|x^*\|_1 = \|x\|_1 \\ \delta_e \end{cases}$

Prop

1) Soit $\pi : \ell^1(\Gamma) \to \mathcal{L}(H)$ représentation involutive ($\pi(x^*) = \pi(x)^*$)

Hilbert

Alors $\pi|\Gamma$ est une représentation unitaire

2) Soit $\Gamma \xrightarrow{U} \mathcal{L}(H)$ une représentation unitaire quelconque. Alors il existe une extension à $\ell^1(\Gamma)$ (nec^t unique) et vérifiant $\|\pi(\sum a_g g)\| \leq \|\sum a_g g\|_1$

On obtient ainsi une correspondance entre les représentations de Γ et celles de $\ell^1(\Gamma)$. On peut se restreindre aux topologiquement irréductibles

Rappels sur les algèbres de Banach

→ sur $\mathbb{C}$, unifère.

Soit A une telle algèbre.

1) Pour $x \in A$, $sp(x) = \{\lambda \in \mathbb{C} : x - \lambda 1$ n'est pas inversible$\}$
$sp(x)$ est un compact non-vide
$\rho(x) = \sup\{|\lambda| : \lambda \in sp(x)\} \leq \|x\|$

2) Calcul fonctionnel holomorphe (cf. ci-dessous)

3) Si A est commutative, il existe une transformée de Gelfand :

$\hat{A}$ (spectre de l'algèbre) $:= \{$caractères non nuls sur $A\}$
$= \{\chi : A \to \mathbb{C}$ morphismes d'algèbres $\chi(1) = 1\}$
$\Leftrightarrow$ idéaux maximaux

On munit de la topologie $\chi_n \to \chi \overset{def}{\Longleftrightarrow} \forall a \in A \ \chi_n(a)$.
$\|\chi\| \leq 1 \ \forall \chi \in \hat{A}$

sup boule unité de A

$\to$ compact comme fermé de la boule unité.

$$\mathcal{G} : A \to C(\hat{A}) \qquad a \mapsto \left| \begin{array}{l} \hat{A} \to \mathbb{C} \\ \chi \mapsto \chi(a) \end{array} \right.$$

est un morphisme C^0 d'algèbre.

<u>Exemple</u> $A = \ell^1(\mathbb{Z})$ $\quad \hat{A} = \cancel{\ } S^1$

$\mathcal{G} : \underset{\in A}{(a_n)} \longmapsto \underset{\in C(S^1)}{f(z) = \sum a_n z^n}$

<u>Pb</u> L'image de $\mathcal{G}$ n'est pas facile à caractériser

$\to$ norme, pour laquelle l'image soit simple.
$\hookrightarrow$ sur $\mathbb{C}(\Gamma)$

(ii) $C^*_{max}(\Gamma)$ Pour $x = \sum a_g g$, $\|x\|_{max} := \sup_\pi \|\sum a_g \pi(g)\|$

où $\begin{cases} \pi \text{ représentation unitaire de } \Gamma \text{ ds un Hilbert } H \\ \|\cdot\| \text{ celle de } \mathcal{L}(H) \end{cases}$

1) $\|x\|_{max} \leq \|x\|_1 < \infty$
2) $\forall x \in C^*_{max}(\Gamma)$ $\|xx^*\|_{max} = \|x\|^2_{max}$
3) Correspondance entre reps unitaires du groupe et de l'algèbre (y compris top. ind)

<u>Déf</u> Une <u>C^*-algèbre</u> est une algèbre de Banach $(A, \|\cdot\|)$ involutive tq $\|xx^*\| = \|x\|^2$
(~~en général~~ on peut supposer $\exists$ unité)

<u>Propriétés des C^*-alg.</u>

<u>* Propriétés algébriques</u>

1) $\|x\|^2 = \rho(x^*x)$ (nature algébrique de $\|\cdot\|$)
2) $\forall \pi : A \to B$ morphisme (algèbre involutive)
   1) $\|\pi(x)\| \leq \|x\|$ $\forall x \in A$ (continuité)
   2) π injectif ssi π isométrique
   3) $\pi(A)$ est fermé

<u>* Analyse fonctionnelle</u>

top forte (norme)

1) Soit $A \subset \mathcal{L}(H)$ sous-algèbre, fermée, $A^* = A$ alors A est une C^*-algèbre.

2) Si A est une C^* algèbre quelconque $\exists H$ Hilbert $\exists \pi : A \to \mathcal{L}(H)$ morphisme isométrique, donc de la forme précédente

3) Il existe un <u>calcul fonctionnel continu</u>

Soit $a \in A$ tq $a^* = a$. On a $\underbrace{sp(a)}_{\text{noté } \hat{a}} \subset \mathbb{R}$

$\exists\ \phi : C(\hat{a}) \longrightarrow A$ morphisme isométrique
$\quad f \longmapsto f(a)$

Construction : $\phi(1) = 1$, $\phi(X) = a \rightsquigarrow \phi(P) = P(a)$ pour tout polynôme. C'est une <u>isométrie</u> de l'algèbre des f^r polynomiale sur $\hat{a}$ dans l'algèbre A.
on prend l'unique extension continue donnée par Stone-Weierstrass.

<u>Application</u>
Soit $x \in A$ tq $x x^* = x^* x$. Si A n'a pas d'idempotent ($p = p^* = p^2$) sauf 0, 1 alors $sp(x)$ est connexe.

<u>preuve</u> Supposons $sp(x)$ non connexe. Soit K ouvert fermé non trivial $1_K \in C(\hat{x})$ définit un idempotent.

<u>Rem</u> : Il existe des méthodes efficaces (K-théorie, V. Lafforgue) pour montrer dans des cas importants l'absence d'idempotent.

<u>* Topologie</u>

1) Soit X compact, $C(X)$, $f^* := \bar{f}$, $\|f\| = \sup_x |f(x)|$ définit une C^*-algèbre commutative.

2) Réciproquement, toute C^*-algèbre commutative ayant une unité a une transformée de Gelfand bijective

Cette fois $C^*(\mathbb{Z}) \xrightarrow[\cong]{\mathcal{G}} C(S^1)$

Rem pour Γ commutatif $C^*(\Gamma) \cong C(\hat{\Gamma})$ dual de Pontriagin.

iii) $C^*_{red}(\Gamma)$ (ou min) est défini à partir de la représentation régulière $\lambda : \Gamma \to \mathcal{L}(\ell^2(\Gamma))$ définie par $\lambda(g)\delta_h = \delta_{gh}$

$\|\Sigma a_g g\|_{min} = \|\Sigma a_g \lambda_g\|_{\mathcal{L}(\ell^2(\Gamma))}$ ("dual tempéré")

Prop
1) $C^*_{red}(\Gamma)$ est une C^*-algèbre (canoniquement représentée, $C^*_{red}(\Gamma) \subset \mathcal{L}(\ell^2(\Gamma))$)

2) $id_{\mathbb{C}[\Gamma]}$ admet un unique prolongement C^0
$\lambda : C^*_{max}(\Gamma) \longrightarrow C^*_{red}(\Gamma)$
(surjectif)

Théorème
1) Γ moyennable ssi $C^*_{max}(\Gamma) \longrightarrow C^*_{min}(\Gamma)$ est bijective

2) Γ a la propriété (T) ssi $\exists p \in C^*_{max}(\Gamma)$ tq $p = p^2 = p_*$ $\forall \pi : \Gamma \to \mathcal{L}(H)$ $\pi(p)$ est le projecteur sur les vecteurs invariants.

(preuve de 2)

Rq $\lambda(p) = 0$: thm de Kesten $\|\lambda(x)\| = 1$ ssi moyennable

<u>Conjecture</u> Si Γ est un groupe sans torsion, alors $C^*_{red}(\Gamma)$ n'a pas de projection $\neq 0, 1$

(lié à la conj. de Baum-Connes)

<u>Rem</u> il n'y a en g^al pas trop de morphismes de C^*-algèbre. On cherche donc à généraliser

1) bimodules (d'un type particulier)
2) applications linéaires particulières.

(2) vient du thm de Stinespring.

A, B C^*-algèbres

$f : A \to B$ <u>positive</u> si $f(A_+) \subset B_+$ $(\forall x \exists y\ f(x^*x) = y^*y)$

<u>complètement positive</u> si $f \otimes \underset{M_n(\mathbb{C})}{id}$ est positive $\forall n$

<u>Thm</u> Si $f : A \to \mathcal{L}(H)$ complètement positive alors $\exists \pi$ représentation de A (morphisme de C^*-algèbre) et $S \in \mathcal{L}(H)$ tq $f(x) = S\pi(x)S^*$

<u>Q</u>: Structure donnée par une dynamique (action de $\mathbb{Z}$) ?

$C(X) \rtimes \mathbb{Z}$ (cas top)

$L^\infty(X) \rtimes \mathbb{Z}$ (cas ergodique $\rightsquigarrow$ alg von Neumann)